SYLLABUS DI MATEMATICA
CONOSCENZE ATTESE PER L'INGRESSO AI CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA, FISICA E INGEGNERIA

Premessa

Questo documento è rivolto agli studenti delle Scuole Superiori che intendono iscriversi a uno dei corsi di Laurea in **Matematica**, **Fisica** o **Ingegneria** dell'Università di Parma – tutti ad accesso libero – e ai loro docenti. Il presente Syllabus è uno strumento per orientare la preparazione preuniversitaria, non uno sbarramento.

L'edizione 2026 è stata aggiornata sulla base delle osservazioni sistematiche raccolte dai docenti nei corsi del primo anno, che segnalano con crescente frequenza alcune difficoltà specifiche:

- uso acritico delle calcolatrici e dei software di calcolo simbolico, che ha indebolito le competenze di calcolo a mano e la verifica dell'ordine di grandezza dei risultati;
- confusione tra *algoritmo di calcolo* e *comprensione concettuale*: saper premere i tasti giusti non equivale a capire cosa si sta calcolando;
- difficoltà nell'uso preciso del linguaggio matematico (implicazioni, quantificatori, definizioni) e nella lettura di un testo tecnico;
- lacune nella geometria euclidea e analitica di base, spesso sacrificata a favore di argomenti di calcolo.

Il documento è strutturato in tre parti: gli **argomenti imprescindibili** (Sezione 1), gli **argomenti raccomandati** (Sezione 2), e una raccolta estesa di **esercizi** (Sezione 3).

Come usare questo documento

Leggete la lista degli argomenti all'inizio dell'ultimo anno di scuola superiore. Verificate onestamente la vostra padronanza di ciascun punto: saper eseguire meccanicamente un procedimento non basta; occorre capire *perché* funziona e *quando* applicarlo. Come regola empirica, puntate a padroneggiare almeno 8 dei 10 argomenti imprescindibili prima dell'inizio del primo anno universitario.

1. Argomenti imprescindibili

Attenzione

Gli argomenti di questa sezione sono considerati *già acquisiti* all'inizio dei corsi universitari. Le carenze in questi punti rendono molto difficile seguire con profitto anche gli insegnamenti del primo semestre.

1.1. **Aritmetica e algebra elementare.** Operazioni fra numeri interi, razionali e reali; proprietà delle quattro operazioni. Potenze con esponente intero, razionale e reale: definizione e proprietà (incluse le regole per il prodotto, il quoziente, la potenza di potenza). Radicali: semplificazione, razionalizzazione del denominatore. Confronto fra numeri razionali senza ricorrere alla calcolatrice.

Date: Edizione 2026.

Dove si trovano difficoltà frequenti

Calcoli con frazioni che coinvolgono più operazioni e priorità; uso corretto delle parentesi; confusione tra $\sqrt{a^2} = |a|$ e $\sqrt{a^2} = a$.

1.2. **Ordini di grandezza e coerenza dei risultati.** Saper stimare l'ordine di grandezza di un risultato *prima* di calcolarlo. Notazione scientifica. Verificare che una risposta sia fisicamente o geometricamente plausibile: un'area non può essere negativa, una probabilità non può superare 1, ecc.

1.3. **Geometria piana e solida.** Formule per perimetro e area di triangoli, parallelogrammi, trapezi e cerchi. Teorema di Pitagora e sue applicazioni. Criteri di similitudine. Formule per la superficie totale e il volume di prismi, cilindri, coni e sfere. Capacità di visualizzare sezioni di solidi.

1.4. **Geometria analitica nel piano.** Distanza fra due punti; punto medio. Retta per due punti; condizione di parallelismo e perpendicolarità; distanza di un punto da una retta. Equazione della circonferenza (forma canonica e generale); intersezione di retta e circonferenza. Equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate; vertice, fuoco, asse di simmetria.

1.5. **Algebra: polinomi e frazioni algebriche.** Operazioni fra polinomi: somma, prodotto, divisione con resto (algoritmo di divisione euclidea). Prodotti notevoli: $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$, $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$. Regola di Ruffini per la divisione per un binomio $x - c$; teorema del resto. Fattorizzazione di polinomi. Semplificazione di frazioni algebriche; operazioni fra frazioni algebriche.

1.6. **Equazioni e disequazioni.**

Equazioni: primo grado, secondo grado (formula generale, discriminante, relazioni fra radici e coefficienti), equazioni riconducibili al secondo grado (biquadratiche, con frazioni algebriche).

Disequazioni: primo e secondo grado; sistemi di disequazioni; disequazioni razionali fratte (studio del segno tramite fattorizzazione).

Errore comune

Moltiplicare ambo i membri di una disequazione per un'espressione il cui segno non è noto, dimenticando di invertire il verso della disequazione nel caso negativo.

1.7. **Trigonometria.** Misura degli angoli in radianti; conversione gradi $\leftrightarrow$ radianti. Definizione delle funzioni sin, cos, tan, cot tramite la circonferenza unitaria. Grafici e proprietà (periodo, parità/disparità). Valori notevoli ($0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ e relativi angoli supplementari, opposti, complementari). Formule di addizione:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Formule di duplicazione. Identità fondamentale $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

1.8. **Funzioni esponenziali e logaritmiche.** Funzione esponenziale $x \mapsto a^x$ con $a > 0$, $a \neq 1$: grafico, proprietà, comportamento asintotico. Definizione di logaritmo come funzione inversa dell'esponenziale. Proprietà dei logaritmi: $\log_a(xy)$, $\log_a(x/y)$, $\log_a(x^r)$, formula del cambio di base. Grafici di $\log_a x$ per $a > 1$ e $0 < a < 1$.

1.9. **Linguaggio matematico e logica elementare.** Simboli insiemistici di base: $\in$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\emptyset$. Quantificatori $\forall$ e $\exists$; negazione di proposizioni quantificate. Implicazione ($\Rightarrow$) e doppia implicazione ($\Leftrightarrow$); condizione necessaria e sufficiente. Contrapposizione. Saper leggere e scrivere una dimostrazione elementare.

Imprescindibilità del ragionamento logico

Dai risultati degli esami del primo anno si evince che una quota significativa degli errori dipende da un ragionamento logico errato o anche da un malinteso del testo del problema: confondere "$P \Rightarrow Q$" con "$Q \Rightarrow P$", ignorare i quantificatori, o non riconoscere quando una definizione viene applicata.

1.10. **Funzioni reali: grafici e proprietà.** Definizione di funzione; dominio, codominio, immagine. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Funzione inversa. Funzioni pari e dispari. Funzioni monotone. Grafico del valore assoluto $|x|$; grafici di x^n per $n \in \mathbb{Z}$; grafici delle funzioni elementari già elencate. Trasformazioni elementari di grafici: traslazioni, riflessioni, scala. Capacità di leggere un grafico e ricavare informazioni qualitative (zeri, segno, monotonia, simmetrie).

2. Argomenti di base raccomandati

Suggerimento

Chi aspira a una carriera in matematica o fisica teorica dovrebbe padroneggiare l'intera lista. Chi si orienta verso l'ingegneria o le applicazioni almeno la prima parte.

2.1. Argomenti raccomandati per tutti.

1. Ellisse e iperbole: equazioni in forma canonica, fuochi, eccentricità, asintoti (per l'iperbole).
2. Equazioni e disequazioni irrazionali; dominio di espressioni contenenti radicali.
3. Equazioni e disequazioni con il valore assoluto.
4. Equazioni e disequazioni trigonometriche elementari ($\sin x = k$, $\cos x = k$, $\tan x = k$).
5. Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche elementari.
6. Principio di induzione matematica: enunciato e applicazioni semplici (somme di serie aritmetiche, disuguaglianze).

2.2. Ulteriori argomenti raccomandati per studenti di Matematica e Fisica.

1. Successioni: definizione ricorsiva ed esplicita; progressioni aritmetiche e geometriche; simbolo di sommatoria $\sum$.
2. Coefficienti binomiali e formula del binomio di Newton.
3. Calcolo combinatorio: permutazioni, combinazioni, disposizioni.
4. Nozioni elementari di probabilità: spazio campionario, eventi, probabilità classica, eventi indipendenti, probabilità condizionata.
5. Vettori nel piano e nello spazio: operazioni, prodotto scalare, lunghezza, angolo fra vettori.
6. Conoscenza di base di un foglio di calcolo o di un sistema di calcolo simbolico (es. `GeoGebra`, `Wolfram Alpha`) *come strumento di verifica*, non come sostituto del ragionamento.

3. Esercizi di riferimento

Gli esercizi che seguono sono organizzati per argomento e hanno difficoltà crescente all'interno di ciascun gruppo. La risoluzione **senza calcolatrice** degli esercizi non contrassegnati è attesa. Gli esercizi contrassegnati con ($\star$) richiedono un ragionamento più elaborato e costituiscono un'ottima preparazione per i corsi universitari.

3.1. **Aritmetica e calcolo con frazioni.**

Esercizio 3.1. Calcolate, senza calcolatrice, il quoziente e il resto della divisione di $34\,571$ per 103.

Esercizio 3.2. Calcolate:

$$\frac{\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{6}}{\dfrac{7}{12}+\dfrac{1}{3}} \qquad \text{e} \qquad \frac{2-\dfrac{3}{5}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}}\,.$$

Esercizio 3.3. Senza calcolare il valore decimale, ordinate crescentemente:

$$-\frac{47}{11},\quad \frac{52}{12},\quad -\frac{33}{8},\quad \frac{65}{15}\,.$$

Esercizio 3.4. Calcolate:

$$\left(\frac{-3}{4}\right)^{-3}\cdot 5^{-\frac{5}{3}}\cdot 4 \qquad \text{e} \qquad \frac{2^8\cdot 5^2\cdot(-5)^2}{(-2)^3\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2\cdot(-3)^3}\,.$$

Esercizio 3.5. Per quali valori reali di a è vera ciascuna delle seguenti uguaglianze?

$$\sqrt{a^2}=a, \qquad \sqrt[3]{8a^3}=2a, \qquad \sqrt{(4+a)^2}=4+a\,.$$

Esercizio 3.6. Semplificare, specificando le condizioni di esistenza:

$$\sqrt{\frac{50a^3b}{2ab^3}} \qquad (a,b>0), \qquad \frac{\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{75}}{\sqrt{3}}\,.$$

3.2. **Geometria e ordini di grandezza.**

Esercizio 3.7. Convertite:

$$3{,}72\,\text{dg}=\ldots\,\text{kg}, \qquad 30\,217\,\text{cm}^2=\ldots\,\text{m}^2, \qquad 4{,}5\,\text{km/h}=\ldots\,\text{m/s}.$$

Esercizio 3.8. Scegliete la risposta plausibile (motivate la scelta senza calcolatrice):

(a) La superficie di un campo di calcio potrebbe essere: $257\,\text{m}^2$ / $7\,200\,\text{m}^2$ / $0{,}136\,\text{km}^2$.

(b) Una sigaretta potrebbe pesare circa: $1\,\text{g}$ / $20\,\text{mg}$ / $2\,\text{hg}$.

(c) L'altezza del Palazzo della Pilotta potrebbe essere: $28\,\text{m}$ / $280\,\text{m}$ / $0{,}3\,\text{km}$.

Esercizio 3.9. Un cono ha raggio di base $3\,\text{m}$ e apotema $5\,\text{m}$. Calcolate la superficie totale e il volume (lasciate il risultato in termini di π).

Esercizio 3.10. Usate $\pi\approx 3{,}14$ e non la calcolatrice. Una vasca ha la forma di un semicilindro di raggio $4\,\text{dm}$ e lunghezza L. Il rubinetto ha portata $0{,}157\,\text{hL/min}$ e riempie la vasca in esattamente due ore. Trovate L.

3.3. **Geometria analitica.**

Esercizio 3.11. La retta passante per $(-1,2)$ e $\left(2,\frac{1}{5}\right)$ ha equazione $\ldots$; la retta per $(17,-4)$ perpendicolare a quella di equazione $3y+5=x$ ha coefficiente angolare $\ldots$

Esercizio 3.12. Scrivete l'equazione della circonferenza di centro $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{5}\right)$ e raggio $\sqrt{3}$, poi portatela nella forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

Esercizio 3.13. Determinate l'intersezione della retta $y=2x-1$ con la circonferenza $x^2+y^2-4x+2y-4=0$. Quanti punti in comune ci sono?

Esercizio 3.14. La parabola $y=ax^2+bx+c$ ha vertice in $(1,3)$ e passa per $(3,-1)$. Trovate a, b, c.

Esercizio 3.15 ($\star$)**.** Tre punti $A = (-2, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (1, k)$ formano un triangolo isoscele con $AC = BC$. Trovate $k \neq 0$ e calcolate l'area del triangolo.

3.4. **Algebra: polinomi, equazioni, disequazioni.**

Esercizio 3.16. Il quoziente e il resto della divisione di $3x^4 - 2x^2 + x - 5$ per $x^2 - x$ sono $Q = \dots$ e $R = \dots$

Esercizio 3.17. Calcolate $(2a - b)^3 - 8a(a - b)^2$ e semplificate. Calcolate poi $\dfrac{1 + a^6}{1 + a^2}$ per $a = 1$ e per $a = -1$.

Esercizio 3.18. Fattorizzate completamente:

$$6x^3 - x^2 - x, \qquad x^4 - 5x^2 + 4, \qquad x^3 + 27.$$

Esercizio 3.19. Risolvete:

$$\frac{3}{5} - \frac{2x/3}{4/3} - \frac{2}{5} - \frac{x/4 + 2/7}{3/5 - 1/10} > 2 - \frac{1}{7}\,.$$

Esercizio 3.20. Risolvete:

$$(5 - 6x^2 + 13x)(9x^2 - 64x^4) = 0\,, \qquad x(3x + 2) > -\tfrac{1}{3}\,, \qquad -6x^2 - 48 = 0\,.$$

Esercizio 3.21. Risolvete: $(4x^2 + 7)(2x - 5x^2 + \frac{3}{5})(2 - 13x) < 0$.

Esercizio 3.22. Risolvete: $(3x^2 + 2)^2 = (7x - 2)^2$.

Esercizio 3.23. Una soluzione dell'equazione $3x^4 - 6x^3 + 2x^2 + x = 10$ è: $x = 2$; $x = 1$; $x = 0$; non ne ha; oppure si tratta di un'equazione di quarto grado che può avere soluzioni, ma non sono trovabili a mano senza tecniche avanzate? Giustificate la risposta.

Esercizio 3.24 ($\star$)**.** Determinate tutti i valori reali del parametro m per i quali l'equazione $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0$ ha due soluzioni positive distinte.

Esercizio 3.25 ($\star$)**.** Risolvete il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

e interpretate geometricamente la soluzione.

3.5. **Logica e linguaggio matematico.**

Esercizio 3.26. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dite se è vera o falsa e scrivete la negazione in forma leggibile (senza usare il simbolo $\neg$):

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R}\colon x^2 + 1 = 0$.

(c) $\forall x > 0,\ \exists y > 0\colon y < x$.

Esercizio 3.27. Considerate l'implicazione: "Se n è divisibile per 4, allora n è pari."

(a) È vera o falsa?

(b) Scrivete la contronominale e dite se è vera.

(c) La conversa ("Se n è pari, allora n è divisibile per 4") è vera?

Esercizio 3.28 ($\star$)**.** Dimostrate per induzione che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ per ogni intero $n \geq 1$.

3.6. **Trigonometria.**

Esercizio 3.29. Qual è il minore fra i seguenti numeri (giustificate senza calcolatrice)?

$$\cos\tfrac{7\pi}{4}, \quad \cos(2\pi), \quad \sin\tfrac{2\pi}{3}, \quad \tan\tfrac{4\pi}{3}.$$

Esercizio 3.30. Calcolate esattamente, senza calcolatrice:

$$\sin\tfrac{5\pi}{12}, \qquad \cos\tfrac{7\pi}{12}, \qquad \tan\tfrac{\pi}{8}.$$

(*Suggerimento:* usate le formule di addizione o di bisezione.)

Esercizio 3.31. Risolvete nell'intervallo $[0, 2\pi)$:

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0\,.$$

Esercizio 3.32 ($\star$)**.** Dimostrate l'identità:

$$\frac{\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)} = \tan\alpha \qquad (\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}).$$

3.7. **Funzioni esponenziali e logaritmiche.**

Esercizio 3.33. Completate:

$$10^x = -\tfrac{1}{100} \iff x = \ldots \qquad \text{(esiste?)}, \qquad \log_4 x = -\tfrac{1}{2} \iff x = \ldots$$

Esercizio 3.34. Risolvete: $\log_{10}(x+1) \leq 2$.

Esercizio 3.35. Se $x = \log_5 135$, allora x:

(A) vale $\sqrt[5]{135}$;

(B) è compreso fra 3 e 4;

(C) non esiste;

(D) vale 27.

Motivate la risposta senza calcolare il valore decimale.

Esercizio 3.36. Risolvete: $2^{x+1} - 3 \cdot 2^x + 2^{x-1} = 3$.

Esercizio 3.37 ($\star$)**.** Risolvete il sistema:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

e verificate che i valori trovati sono effettivamente nel dominio delle funzioni logaritmiche.

3.8. **Grafici e funzioni.**

Esercizio 3.38. Considerate la funzione $g(x) = \dfrac{2x+5}{3x-6}$. Calcolate (se esistono): $g(2)$, $g(0)$, $g(-4)$, $g(3)$, e $g\big(\frac{11}{3}\big)$. Determinate il dominio e le equazioni degli asintoti.

Esercizio 3.39. Disegnate accuratamente (a mano, su carta millimetrata) il grafico di una funzione $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ tale che:

- f è crescente per $0 \leq x \leq 1$;
- $f(3) = 0$;
- f è decrescente per $2 \leq x \leq 4$;
- f ha un massimo locale per $x = 5$.

La funzione da voi disegnata è unica? Giustificate.

Esercizio 3.40. Per ciascuna delle seguenti funzioni, determinate dominio, eventuali simmetrie (parità/disparità), e disegnate il grafico:

$$f(x) = |2x - 3|, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \qquad h(x) = \log_2 |x| \,.$$

Esercizio 3.41 ($\star$)**.** La funzione $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ (con $ad - bc \neq 0$) è detta *trasformazione di Möbius*. Dimostrate che f è iniettiva su tutto il suo dominio e trovate la funzione inversa f^{-1}.

3.9. **Esercizi integrativi e di ragionamento.**

Esercizio 3.42. Un recipiente cubico di lato ℓ è riempito per $\frac{2}{3}$ di acqua. Viene poi aggiunto un solido sferico di raggio $r < \ell/2$. Trovate la condizione su r affinché l'acqua non trabocchi.

Esercizio 3.43 ($\star$)**.** *(Ragionamento per assurdo.)* Dimostrate che $\sqrt{2}$ è irrazionale. (*Suggerimento:* supponete $\sqrt{2} = p/q$ con $\gcd(p, q) = 1$ e cercate una contraddizione.)

Esercizio 3.44 ($\star$)**.** Siano $a, b > 0$. Dimostrate la disuguaglianza fra media aritmetica e media geometrica:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}\,,$$

e dite quando vale l'uguaglianza.

Esercizio 3.45 ($\star$)**.** *(Algebra e geometria insieme.)* Dimostrate che la somma dei quadrati delle diagonali di un parallelogramma è uguale alla somma dei quadrati dei quattro lati. (*Suggerimento:* posizionate il parallelogramma nel piano con un vertice nell'origine.)

Risorse consigliate

- **Precorso di Matematica Online**. Disponibile sul portale Elly 2025 utilizzando le credenziali di Ateneo ricevute al momento dell'immatricolazione.
  https://elly2025.didattica.unipr.it/course/view.php?id=6135
- **Videopillole SMFI**. Video-pillole di Matematica su alcuni argomenti di base.
  Autori: Proff. A. Saracco e A. Zaccagnini (Dipartimento SMFI).
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLsIU9zg83sZOBUlyqcHL8mCtiyu0YwOWF
- **Precorsi di Matematica**. Ve ne sono diversi, organizzati dai vari corsi di laurea generalmente nella prima metà di settembre. Per il corso di Laurea in Matematica:
  https://corsi.unipr.it/it/cdl-mate/test-non-selettivo

Uso degli strumenti digitali

I software di calcolo simbolico (Wolfram Alpha, GeoGebra, etc.) sono ottimi per *verificare* i propri calcoli o esplorare esempi. Non devono però diventare una scorciatoia per evitare di ragionare: agli esami scritti del primo anno non sono generalmente ammesse calcolatrici.

Lo stesso vale per l'AI (ChatGPT, Claude, etc.), le cui risposte tuttavia non sono generalmente affidabili al 100%.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Università degli Studi di Parma, Parco Area delle Scienze 53A, 43123 Parma